

Correction du mid-term 17.04.25

I. S sous-espace de $\mathbb{R}^n$, $S^\perp$ son ~~orthogonale~~ orthogonale

Soit P le projecteur sur S

Q sur $S^\perp$

① Que sont $P+Q$ et PQ ?

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad x = Px + Qx \text{ (unique)}$$

$$= (P+Q)x \Leftrightarrow (P+Q) = \text{Id}_n$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \underbrace{PQ(x)}_{y \in S^\perp} = Py = 0 \quad S \perp S^\perp$$

$$\Rightarrow PQ = 0$$

I.2 Montrer que $P-Q$ est son propre inverse

$$P+Q=I \Leftrightarrow \underline{P=I-Q}$$

$$(P-Q)(P-Q) \neq I$$

$$\begin{aligned} (I-Q-Q)(I-Q-Q) &= (I-2Q)(I-2Q) \\ &= \underline{I + 4Q^2 - 4Q} \end{aligned}$$

$$4Q^2 \neq 4Q$$

$$\underline{Q^2 \neq Q}$$

oui car Q est idempotent

I.3 Quel est le projecteur orthogonal P_R sur le row-space de A , quel que soit $n \times m$

→ row-space = Range (A^T)

! $P_R = A^T (A A^T)^{-1} A$ il faut que $A A^T$ soit inversible
 $\Rightarrow N(A^T) = \{0\}$

I.4 Quelle est la relation entre P_R et P_N le projecteur orth. sur $N(A)$?

- $N(A) \perp R(A^T)$

$P_N \perp P_R$ car $P_N = I - P_R$

II. A $n \times m$, réelle

1. $\text{rank}(A) = 1$ SSI $\exists v \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^m$ tq $A = v w^T$
 $v w^T = \begin{pmatrix} w_1 v & w_2 v & \dots & w_m v \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ clairement $\text{rank}(A) = 1$!

Supposons $\text{rank}(A) \geq 1$

$$\forall x \in \mathbb{R}^m \quad Ax = \alpha v \quad v \in \text{Range}(A)$$

e_i $i=1, \dots, m$ base canonique de $\mathbb{R}^m$

$$\underbrace{A e_i}_{\substack{\text{ième colonne} \\ \text{de } A}} = \alpha_i v \Rightarrow A = \begin{pmatrix} \alpha_1 v & \dots & \alpha_m v \\ | & & | \\ v & \alpha^T & v \end{pmatrix}$$

II.2 Prouver que $A^+ = \frac{1}{\|N\|^2 \|W\|^2} A^T$
 $A = N W^T$

on vérifie les 4 axiomes $A^+ = \frac{1}{\|N\|^2 \|W\|^2} W N^T = G$

$$AGA = A \quad (N \overset{\|W\|^2}{W^T}) \frac{W N^T}{\|N\|^2 \|W\|^2} (N W^T) = N W^T = A$$

$$GAG = G \quad (\bar{W} \overset{\|N\|^2}{N^T}) (\bar{N} \overset{\|W\|^2}{W^T}) \frac{W N^T}{\|N\|^2 \|W\|^2} = \frac{W N^T}{\|N\|^2 \|W\|^2} = G$$

$$(AG)^T = AG \quad \left(\frac{(N W^T)(W N^T)}{\|N\|^2 \|W\|^2} \right)^T = \frac{(N W^T)(W N^T)}{\|W\|^2 \|N\|^2} \frac{N N^T}{\|N\|^2}$$

$\left(\frac{(N \cdot \bar{W}^T)(\bar{W} \cdot N^T)}{\|N\|^2 \|W\|^2} \right) = \frac{N N^T}{\|N\|^2}$

$$(GA)^T = GA = \left(\frac{\omega \bar{v}^T}{\|v\|^2 \|w\|^2} \quad v \omega^T \right)^T$$

$$= \frac{\omega \bar{v}^T}{\|v\|^2 \|w\|^2} - \bar{v} \omega^T = \frac{\omega \omega^T}{\|w\|^2} \neq GA$$

$$\left(\frac{\omega \bar{v}^T}{\|v\|^2 \|w\|^2} \right) (v \omega^T) = \frac{\omega \omega^T}{\|w\|^2}$$

Let's assume ok

$$G = A^T$$

II.3 Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

quel est x^* tq $\|Ax^* - b\|_2$ est minimale

• A est de rang 1 $A = N N^T$ $N = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

• La solution du Least Square est donnée $A^+ b + N(A)$

$$A^+ = A^T = A$$

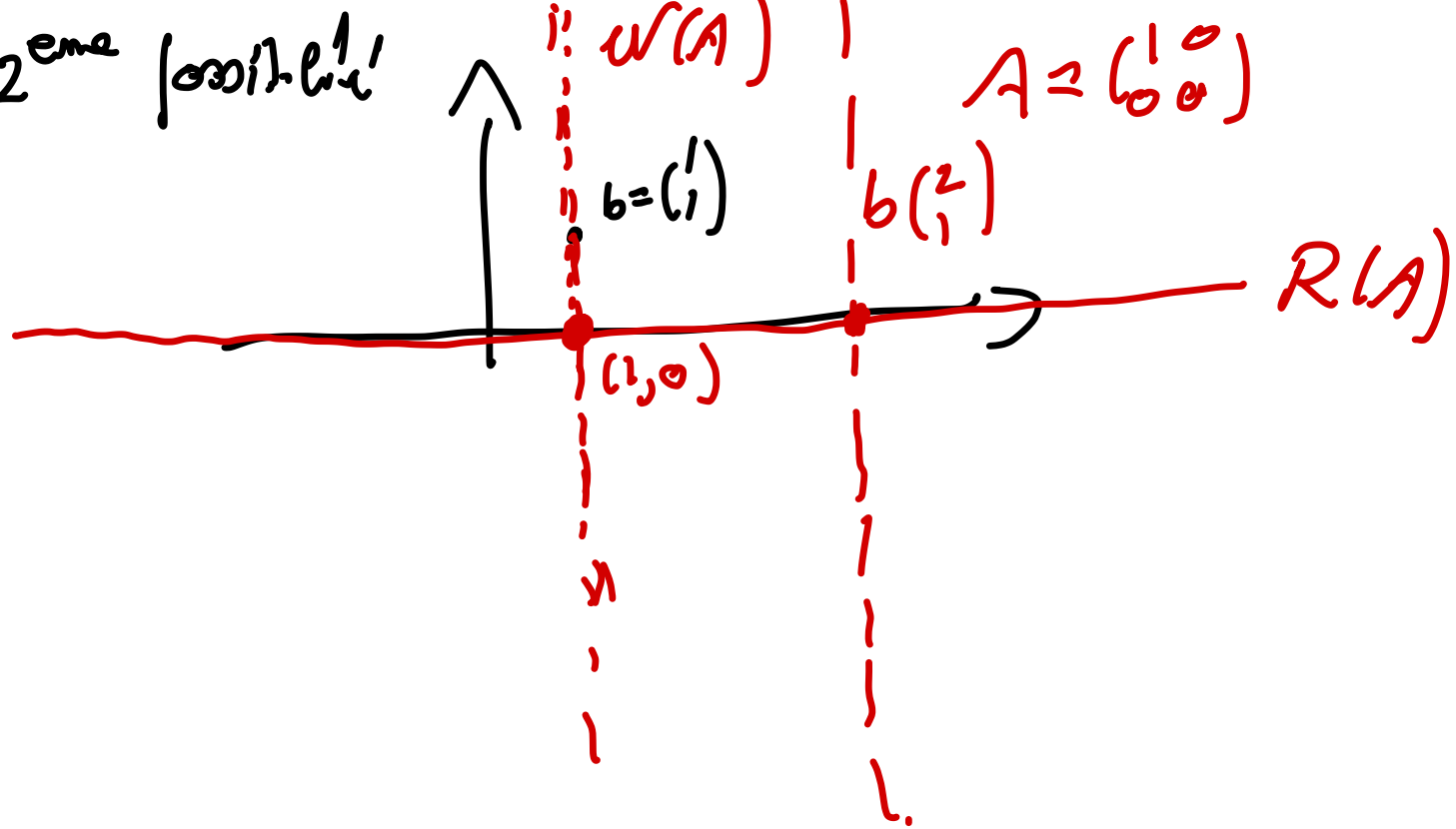
$$\Rightarrow x^* = A^+ b = A b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$b \notin R(A)$$

$$N(A) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$A \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2^{eme} | 0 0 | 1 1



II.4 Soit $A_\epsilon = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\epsilon > 0$

quel est x_1^* qui minimise $\|A_\epsilon x_1^* - b\|$?

A_ϵ est rank 1 A_ϵ $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $w = \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \end{pmatrix}$

$$A_\epsilon^+ = \frac{1}{1+\epsilon^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1^* = \frac{1}{1+\epsilon^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{1+\epsilon^2} \begin{pmatrix} 1 \\ \epsilon \end{pmatrix}$$

solution particulière

Tout le
solutions

$$\underbrace{x_\epsilon^*}_{\text{solution}} + \underbrace{(\mathbb{I} - A_\epsilon^+ A_\epsilon) y}$$

$$(\mathbb{I} - A_1^T A_1) y \approx \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{1+\epsilon^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \epsilon & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] y$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{1+\epsilon^2} & -\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2} \\ -\frac{\epsilon}{1+\epsilon^2} & 1 - \frac{\epsilon^2}{1+\epsilon^2} \end{pmatrix} y$$

$$\approx \frac{1}{1+\epsilon^2} \begin{pmatrix} \epsilon^2 & -\epsilon \\ -\epsilon & 1 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} y \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon^2 y_1 - \varepsilon y_2 \\ \varepsilon^2 & -\varepsilon y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

que se demande-t-il sur $\|x_1^\# - x^\# \|$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$
 quand $\varepsilon \rightarrow 0$ les éléments du noyau sont (y_2)

$$\rightarrow \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|x_1^\# - x^\# \|_2 = 0$$

II.5 Soit $A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$ $\varepsilon > 0$

calculer x_ε^*

comme $\varepsilon > 0$ et A_ε est inversible alors $A_\varepsilon^+ = A_\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$

Solution

$$x_\varepsilon^* = A_\varepsilon^+ b = A_\varepsilon^{-1} b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}$$

quid de $\|x_\varepsilon^* - x_0^*\|_2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} +\infty$

III n pays, $n=2$ $k \in \mathbb{N}$

$x_j[k]$ quantité d'action du pays j au temps k

Ces quantités évoluent par $j=1, 2$ de la façon suivante

$$x_1[k+1] = \alpha x_1[k] + (1-\alpha)x_2[k] \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$x_2[k+1] = \alpha x_2[k] + (1-\alpha)x_1[k]$$

Mettre sous forme matricielle $\bar{x}[k+1] = A \bar{x}[k]$
 $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$

III.1 donner A , valeurs propres, valeurs propres en fait de λ

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

$$\det(A - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} \alpha - \lambda & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha - \lambda \end{pmatrix}$$

$$= (\alpha - \lambda)^2 - (1-\alpha)^2 = P(\lambda)$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda\alpha + (2\alpha - 1) \text{ ou } \underline{P(\lambda) = (1-\lambda)(2\alpha - 1 - \lambda)}$$



$$\lambda_{1,2} = \frac{2\alpha - 1}{1}$$

Vektoren propre $A = \begin{pmatrix} 2 & 1-\alpha \\ 1-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1$ $Ax = x$ $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\lambda_2 = 2\alpha - 1$ $Ax = (2\alpha - 1)x$ $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\alpha x + (1-\alpha)y = (2\alpha-1)x$

$\alpha y + (1-\alpha)x = (2\alpha-1)y$

$\Rightarrow (\alpha-1)x = (1-\alpha)y \stackrel{\alpha \neq 1}{\Rightarrow} x = -y \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

III. 2 Solution de $x[k+1] = A x[k]$
Etude $k \rightarrow +\infty$, est-ce un régime stationnaire

Solution de $x[k+1] = A x[k]$

$$x[k] = A^k x[0]$$

$$A^k = U D^k U^{-1} \quad D^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2\alpha-1)^k \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$0 < \alpha < 1 \Rightarrow |2\alpha - 1| < 1$$

$$\text{donc } \lambda_c^k = (2\alpha - 1)^k \xrightarrow[k \rightarrow +\infty]{} 0$$

Le système évolue vers,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathcal{U} \mathcal{D}^k \mathcal{U}^T x_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x[0]$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} (x_1[0] + x_2[0]) \\ \frac{1}{2} (x_1[0] - x_2[0]) \end{pmatrix}$$

$\alpha = 1$ la d'homme

$$\alpha = 0 \quad \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1 \quad \mathcal{D}^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}$$

III.3 on perturbe les échanges $0 \leq \tau_1, \tau_2 \leq 1$

$$x_1[k] = \alpha x_1[k-1] + \tau_1 (1-\alpha) x_2[k-1]$$

$$x_2[k] = \alpha x_2[k-1] + \tau_2 (1-\alpha) x_1[k-1]$$

$$x[k] = A_T x[k-1]$$

• Calculer A_T $A_T = \begin{pmatrix} \alpha & \tau_1(1-\alpha) \\ \tau_2(1-\alpha) & \alpha \end{pmatrix}$

Quelle est la diagonale avec A

• Calculer les valeurs propres de A_T

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\alpha - \lambda)^2 - \tau_1 \tau_2 (1 - \alpha)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm \sqrt{\tau_1 \tau_2 (1 - \alpha)}$$

on the full plane over an une N.P. dominant ≈ 1

$$|\lambda_{1,2}| < 1$$

$$(4) \quad x[k] = A_T^k x[0] = \sum_{i=1}^2 \lambda_i^k (v_i^T x[0]) v_i$$

$\lambda_i \rightarrow 0$

ex: $\alpha = 0.5 \quad \tau_1 = \tau_2 = 0.5$

$$\lambda_1 = 0.75 \quad \lambda_2 = 0.25$$
